# تعیین علامت

## تعیین علامت معادلات و نامعادلات گویا و اصم

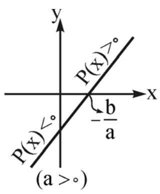
در کتاب دیفرانسیل ۱ با خواص نامعادله‌ها آشنا شدیم.

حالا می‌خواهیم علامت یک عبارت جبری (معمولاً چندجمله‌ای یا گویا) را تعیین کنیم.

یعنی بفهمیم برای چه مقادیری از $x$، مثبت و برای چه مقادیری از $x$، منفی می‌شود.

این بیان‌ها معادل‌اند (یکی هستند):

۱) $P(x) > ۰$
۲) حاصل $P(x)$ مثبت است.
۳) نمودار $y = P(x)$ بالای محور $x$ها قرار دارد.
۴) $\frac{۱}{\sqrt{P(x)}}$ تعریف می‌شود.
۵) $\log P(x)$ معنی دارد.
۶) ..............




- از ساده‌ترین حالت شروع می‌کنیم. اگر $P(x)$ از درجه‌ی اول باشد، یعنی $P(x) = ax + b$، داریم:

نمودار $y = ax + b$ یک خط راست است.

اگر $a > ۰$ باشد، برای $x > -\frac{b}{a}$ حاصل مثبت و برای $x < -\frac{b}{a}$ حاصل منفی می‌شود.

پس مرز بین + و − شدن عبارت، نقطه‌ای است که مقدار عبارت صفر می‌شود. یعنی عبارت در محل ریشه‌اش تغییر علامت می‌دهد.

باید اول معادله‌ی $P(x) = ۰$ را حل کنیم و ریشه‌ها (صفرها) را پیدا کنیم.

در حالت $a < ۰$، علامت‌ها برعکس می‌شوند. در حالت کلی می‌گوییم:

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{b}{a}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $ax + b$ | | مخالف علامت a | ۰ | موافق علامت a | |

اگر برای $ax + b$، توان فرد یا رادیکال فرجه فرد بگذاریم هیچ تغییری در علامتش نمی‌دهد. اما توان زوج یا قدرمطلق، باعث می‌شوند علامت‌ها مثبت شود:

| $x$ | | $-۴$ | |
|---|---|---|---|
| $(x+۴)^۷$ | − | ۰ | + |

| $x$ | | $۲$ | |
|---|---|---|---|
| $(x-۲)^۶$ | + | ۰ | + |

| $x$ | | $\frac{۱}{۲}$ | |
|---|---|---|---|
| $\lvert ۲x-۱ \rvert$ | + | ۰ | + |

- برویم سراغ عبارت درجه‌دوم $P(x) = ax^۲ + bx + c$

نمودار $y = ax^۲ + bx + c$ یک سهمی است. قرار شد اول $P(x) = ۰$ را حل کنیم:

$$ax^۲ + bx + c = ۰ \Longrightarrow \Delta = b^۲ - ۴ac \quad , \quad x_{۱,۲} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{۲a}$$

الف) اگر $\Delta > ۰$ باشد، علامت به این صورت است:

| $x$ | | $x_۱$ | | $x_۲$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(x)$ | موافق علامت a | ۰ | مخالف علامت a | ۰ | موافق علامت a |

ب) در حالت $\Delta = ۰$ علامت به این شکل می‌شود:

| $x$ | | $x_۱ = x_۲$ | |
|---|---|---|---|
| $P(x)$ | موافق علامت a | ۰ | موافق علامت a |

ج) در حالت $\Delta < ۰$ هم داریم:

| $x$ | |
|---|---|
| $P(x)$ | موافق علامت a |

بنابراین سهمی در حالتی که دو ریشه داشته باشد، تغییر علامت می‌دهد و محور افقی را قطع می‌کند.

در حالت ریشه‌ی مضاعف ($\Delta = ۰$) نمودار بر محور افقی مماس است و تماماً در یک طرف آن قرار دارد. عبارت درجه دوم هم مربع کامل است.

در حالت $\Delta < ۰$ سهمی محور افقی را قطع نمی‌کند و علامتش همواره ثابت است. داریم:

$$\underset{x\in\mathbb{R}}{ax^۲+bx+c>۰} \iff \begin{cases}\Delta<۰\\ a>۰\end{cases} \iff \text{نمودار همواره بالای محور } x \text{ هاست.}$$

$$\underset{x\in\mathbb{R}}{ax^۲+bx+c<۰} \iff \begin{cases}\Delta<۰\\ a<۰\end{cases} \iff \text{نمودار همواره زیر محور افقی است.}$$

پس در حالت کلی برای عبارت درجه‌دوم، این‌طوری یاد بگیرید که در بین دو ریشه، مخالف علامت $a$ است. حالا اگر $\Delta \leq ۰$ باشد، ناحیه‌ی بین دو ریشه را نداریم.

**نتیجه**: علامت یک عبارت جبری، در دو طرف ریشه‌ی مضاعف تفاوتی ندارد.

## تعیین علامت عبارت جبری یا کسری در حالت کلی

اول باید تمام ریشه‌های صورت و مخرج را پیدا کنیم. نوع این ریشه‌ها هم مهم است، یعنی باید توجه کنیم که ساده یا مضاعف یا قدرمطلقی یا توان زوج یا توان فرد هستند.

بعد در جدول تعیین علامت، تمام ریشه‌ها را می‌چینیم. اگر ریشه‌ی صورت بود، صفر و اگر ریشه‌ی مخرج بود، تعریف نشده است.

علامت عبارت را در $+\infty$(با نگاه به پرتوان‌ها) می‌نویسیم. بعد شروع به حرکت می‌کنیم و به طرف چپ می‌رویم. از روی ریشه‌ی ساده یا توان فرد که رد شدیم، علامت عوض می‌شود.

این را دنبال کنید:

$$y=\frac{-۳(x-۲)(x+۱)^۴(x^۲+۵x+۶)}{(x-۱)^۳\,|x-۳|\,(x^۲+x+۱)}$$

اول ریشه‌ها: صورت: $x-۲=۰ \Rightarrow x=۲\ ,\ x+۱=۰ \Rightarrow x=-۱\quad ,\quad x^۲+۵x+۶=(x+۲)(x+۳)=۰ \Rightarrow x=-۲,-۳$

راستی حواسمان باشد که $x=-۱$ از عبارت توان زوج آمده است.

مخرج: $x-۱=۰ \Rightarrow x=۱\ ,\ x-۳=۰ \Rightarrow x=۳\ ,\ x^۲+x+۱=۰ \Rightarrow \Delta<۰$

$x=۳$ از عبارت قدرمطلقی است. عبارت درجه دوم هم ریشه نداشت!

حالا جدول:

| x | $-\infty$ | $-۳$ | $-۲$ | $-۱$ | ۱ | ۲ | ۳ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | ۰ | ۰ | ۰ | ت ن | ۰ | ت ن | |

جملات پرتوان به صورت $\frac{-۳xx^۴x^۲}{x^۳\,|x|\,x^۲}$ هستند که در $+\infty$ جواب $-$ می‌شود:

| x | $-\infty$ | $-۳$ | $-۲$ | $-۱$ | ۱ | ۲ | ۳ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | ۰ | ۰ | ۰ | ت ن | ۰ | ت ن | $-$ |

علامت در $+\infty$

حالا به طرف چپ حرکت می‌کنیم. از روی $x=۳$ و $x=-۱$ که رد شویم، علامت ثابت می‌ماند. اما از روی بقیه که رد شویم، علامت عوض می‌شود:

| x | $-\infty$ | | $-۳$ | | $-۲$ | | $-۱$ | | ۱ | | ۲ | | ۳ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $-$ | ۰ | $+$ | ۰ | $-$ | ۰ | $-$ | ت ن | $+$ | ۰ | $-$ | ت ن | $-$ | |

پس در $-\infty$ باید $-$ بشود، جملات پرتوان هم همین را می‌گویند (پس درست حل کردیم).

حالا فرض کنید از ما خواسته‌اند $\frac{-۳(x-۲)(x+۱)^۴(x^۲+۵x+۶)}{(x-۱)^۳\,|x-۳|\,(x^۲+x+۱)} \geq ۰$ باشد.

جواب کجاست؟ خب فاصله‌های $(۱,۲]$ و $[-۳,-۲]$ و همچنین نقطه با طول $-۱$، که می‌توانیم بنویسیم $(۱,۲]\cup\{-۱\}\cup[-۳,-۲]$.

راستی اگر نسبت جملات پرتوان، نهایتاً توان زوجی از $x$ باشد، علامت عبارت در $+\infty$ و $-\infty$ مثل هم است. مثلاً در همین سؤال $\frac{-۳xx^۴x^۲}{x^۳\,|x|\,x^۲}=-\frac{۳x^۲}{|x|}$ که در $\pm\infty$ علامت یکسانی دارد.

# تعیین علامت و معادلات ونامعادلات گویا و اصم

**۱- در بازه‌ی $[x_۰,+\infty)$ نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{۱}{۲}x+۲$ بالاتر از خط به معادله‌ی $y=۳(x-۱)$ قرار نمی‌گیرد. کم‌ترین مقدار $f(x_۰)$ کدام است؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

**۲- نمودار تابع $y=۴-|x|$ در بازه‌ی $(a,b)$ بالاتر از خط $۲y+x=۵$ قرار دارد. بزرگ‌ترین مقدار $b-a$ کدام است؟** *(خارج از کشور ۸۶)*

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

**۳- در مورد $y=۲x^۲-۵x+۲$ کدام نادرست است؟** *(کتاب درسی)*

۱) محور $x$ها را در دو نقطه سمت راست مبدأ قطع می‌کند.
۲) در بازه‌ای با طول $\frac{۳}{۲}$، نمودارش زیر محور افقی است.
۳) علامتش دو بار تغییر می‌کند.
۴) در تجزیه‌اش عامل $(۲x-۱)$ وجود ندارد.

**۴- اگر $y=x^۲+x+۱$ کدام گزاره صحیح نیست؟** *(کتاب درسی)*

۱) جواب نامعادله $y\geq ۰$، به‌صورت $\mathbb{R}$ است.
۲) نمودار به ازای هر $x$ بالای محور $x$ها قرار دارد.
۳) منحنی در نواحی اول و دوم قرار دارد.
۴) $y$ به دو چندجمله‌ای درجه اول تجزیه می‌شود.

**۵- در بازه‌ای مقادیر تابع با ضابطه‌ی $y=x^۲$ کم‌تر از مقادیر تابع با ضابطه‌ی $y=|x-۲|$ است. آن بازه کدام است؟** *(سراسری ریاضی ۸۱)*

۱) $(-۲,۱)$ ۲) $(-۱,۰)$ ۳) $(-۱,۱)$ ۴) $(۰,۱)$

**۶- اگر ارتفاع یک توپ در ثانیه‌ی t اُم، از رابطه‌ی $-t^۲+۴t+۱$ به دست آید، توپ در چند ثانیه از حرکتش، ارتفاع بیش از ۴ متر دارد؟** *(کتاب درسی)*

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

**۷- مقادیر تابع $f(x)=-\frac{۱}{۲}x^۲+۲x+۶$، در بازه‌ی $(a,b)$ بزرگ‌تر از $\frac{۷}{۲}$ می‌باشد. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟**

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۵/۵ ۴) ۶

**۸- ارتفاع توپ‌های دو نفر از تابع‌های $h(t)=-t^۲+۱۰t$ و $g(t)=-۳t^۲+۱۸t$ به دست می‌آیند. طی چند ثانیه توپ g بالاتر از h است؟** *(کتاب درسی)*

۱) ۸ ۲) ۴ ۳) ۱۰ ۴) ۱۸

**۹- نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{۳x^۲-۲x}{x^۲+۴}$ در بازه‌ی $(a,b)$ پایین‌تر از خط به معادله‌ی $y=۲$ است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟** *(خارج از کشور ۸۸)*

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) $\infty$

**۱۰- در تزریق یک دارو، غلظت دارو t ساعت پس از تزریق به صورت $C(t)=\frac{۰/۱۲t}{t^۲+۲}$ است (بر حسب گرم در لیتر). در چه زمانی این غلظت، حداقل ۰/۰۴ گرم در لیتر خواهد بود؟** *(کتاب درسی)*

۱) در طول ساعت اول پس از تزریق
۲) تا ساعت دوم پس از تزریق
۳) از ساعت دوم تزریق به بعد
۴) در طول ساعت دوم پس از تزریق

**۱۱- به ازای کدام مجموعه مقادیر a، هر نقطه از نمودار تابع $f(x)=(a-۱)x^۲+۲\sqrt{۲}x+a$، در بالای محور x هاست؟** *(خارج از کشور ۸۹)*

۱) $a<-۱$ ۲) $a>۱$ ۳) $a>۲$ ۴) $۱<a<۲$

**۱۲- به ازای کدام مقادیر m، نمودار تابع $y=(m+۲)x^۲-۲mx+۱$ همواره در بالای محور x هاست؟** *(خارج از کشور ۸۵)*

۱) $m>-۲$ ۲) $-۲<m<-۱$ ۳) $-۲<m<۲$ ۴) $-۱<m<۲$

**۱۳- به ازای کدام مقادیر m، نمودار تابع $y=(m-۱)x^۲+\sqrt{۳}x+m$ همواره در زیر محور x هاست؟** *(سراسری ریاضی ۸۵)*

۱) $m<-\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}<m<۱$ ۳) $۱<m<\frac{۳}{۲}$ ۴) $m>\frac{۳}{۲}$

**۱۴- به ازای کدام مقدار $m$، نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=(m-2)x^2-3x+m+2$ بالای محور $x$ ها و مماس بر آن است؟** (سراسری ریاضی ۸۲)

۱) $-3$ ۲) $-\frac{5}{2}$ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) $3$

**۱۵- اگر بیشترین مقدار تابع $f(x)=(k+3)x^2-4x+k$ برابر صفر باشد، مقدار $k$ کدام است؟** (سراسری ریاضی ۸۳)

۱) $-4$ ۲) $-1$ ۳) $1$ ۴) $4$

**۱۶- با کدام مقادیر $m$، منحنی به معادله‌ی $y=(m+2)x^2-2x+1$ از هر چهار ناحیه‌ی محورهای مختصات می‌گذرد؟** (خارج از کشور ۸۷)

۱) $m<-2$ ۲) $m<-1$ ۳) $-2<m<-1$ ۴) $-4<m<-2$

**۱۷- نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^3-4x^2-x+4\,;\,x>-1$ در بازه‌ی $(a,b)$ زیر محور $x$ هاست. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟**

۱) $5$ ۲) $3$ ۳) $4$ ۴) $2$ (سراسری ریاضی ۸۸)

**۱۸- اگر $a,b,c$ اعداد مثبت باشند، حداقل مقدار $(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})$ چه‌قدر است؟** (کتاب درسی)

۱) $2$ ۲) $8$ ۳) $6$ ۴) $9$

**۱۹- اگر عبارت $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}-\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+\sqrt[6]{\frac{1}{x^2}-\frac{3}{4}}$ بامعنی باشد، $x$ چه مقادیری دارد؟** (کتاب درسی)

۱) فقط یک بازه‌ی متناهی
۲) فقط دو بازه‌ی متناهی
۳) فقط یک بازه‌ی نامتناهی
۴) فقط دو بازه‌ی نامتناهی

**۲۰- مجموعه جواب نامعادله‌ی $\frac{1}{x-1}>\frac{1}{x-3}$ به کدام صورت است؟**

۱) $x<3$ ۲) $1<x<3$ ۳) $2<x<3$ ۴) $-2<x<3$


## ۱- گزینه‌ی «۳»

بالاتر قرار نمی‌گیرد یعنی کم‌تر یا مساوی است: $\frac{۱}{۲}x+۲\le ۳(x-۱) \Longrightarrow ۵\le \frac{۵}{۲}x \Longrightarrow x\ge ۲$

پس بازه‌ی $[x_\circ,+\infty)$ می‌تواند به صورت $[۲,+\infty)$ باشد؛ یعنی $x_\circ \ge ۲$. حالا چون $f$ صعودی است، حداقل مقدار $f(x_\circ)$ برابر است با:

$$\min f(x_\circ)=\frac{۱}{۲}x_{\circ\min}+۲=\frac{۱}{۲}(۲)+۲=۳$$

## ۲- گزینه‌ی «۲»

بالاتر یعنی بزرگ‌تر: $۴-|x|>\frac{۵-x}{۲}$

one

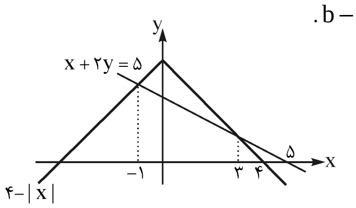
الف) $x\ge \circ \Longrightarrow ۴-x>\frac{۵-x}{۲} \Longrightarrow ۸-۲x>۵-x \Longrightarrow ۳>x$

پس در حالت $x\ge\circ$، داریم $x<۳$؛ یعنی $\circ\le x<۳$.

ب) $x<\circ \Longrightarrow ۴+x>\frac{۵-x}{۲} \Longrightarrow ۸+۲x>۵-x \Longrightarrow x>-۱$

در این حالت هم $-۱<x<\circ$ جواب است. خلاصه در کل، $(-۱,۳)$ مجموعه جواب خواهد شد و داریم $b-a=۴$.

two شکل‌ها:



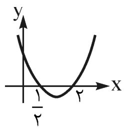

## ۳- گزینه‌ی «۴»

اول برویم سراغ $\Delta$ و ریشه‌ها: $\Delta=b^۲-۴ac \Longrightarrow \Delta=(-۵)^۲-۴(۲)(۲)=۹ \Longrightarrow x_{۱,۲}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a} \Longrightarrow x_۱=\frac{۵+۳}{۲\times۲}=۲\ ,\ x_۲=\frac{۵-۳}{۲\times۲}=\frac{۱}{۲}$

جدول می‌شود:

| x | | $\frac{۱}{۲}$ | | ۲ | |
|---|---|---|---|---|---|
| y | + | ∘ | − | ∘ | + |

و نمودارش هم این است:




تجزیه را هم بلدیم: $a(x-x_۱)(x-x_۲)=۲(x-۲)(x-\frac{۱}{۲})=(x-۲)(۲x-۱)$

**توجه** ضریب ۲ را توی $(x-\frac{۱}{۲})$ ضرب کردیم! با این تفاسیر، ۱ ، ۲ و ۳ درست‌اند و ۴ ناصواب است!!

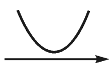
## ۴- گزینه‌ی «۴»

این‌بار $\Delta$ منفی است: $a=b=c=۱ \Longrightarrow \Delta=۱^۲-۴(۱)(۱)<\circ$

پس جدولمان

| x | دلخواه |
|---|---|
| y | + |

و نمودار هم به شکل



است. اما $y$ تجزیه نخواهد شد! پس ۴ درست نیست.

**توجه** این کلمه‌ی «دلخواه» که توی جدول نوشتم، کار کتاب درسی است (صفحه‌ی ۸۳ ریاضی ۲) من بی‌تقصیرم! حواستان هست که متن ۱ ، ۲ و ۳ حرف یکسانی می‌زنند!

## ۵- گزینه‌ی «۱»

**one** باید $x^2 < |x-2|$ باشد. حالا در دو حالت بررسی کنیم:

$$x \ge 2 \Rightarrow x^2 < x-2 \Rightarrow x^2 - x + 2 < 0$$

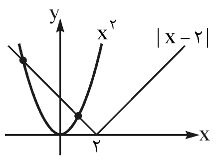
این‌که امکان ندارد چون $x^2 - x + 2$ همیشه مثبت است.

$$x < 2 \Rightarrow x^2 < 2-x \Rightarrow x^2 + x - 2 < 0 \Rightarrow (x+2)(x-1) < 0$$

| x | | $-2$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| P | + | | − | | + |

پس $x \in (-2,1)$ جواب نامعادله است که با شرط $x < 2$ هم سازگار است.

**two** یک نگاه به شکل‌ها بیندازید:




حالا در چه بازه‌ای سهمی پایین‌تر از قدرمطلق است؟

خب در بازه‌ای که از منفی‌ها شروع شده و تا یک جایی بین ۰ و ۲ جلو می‌رود. واضح است که قسمت منفی هم بیشتر است.

## ۶- گزینه‌ی «۲»

خب باید $-t^2 + 4t + 1 > 4$ باشد. یعنی داریم:

$$t^2 - 4t + 3 < 0 \Rightarrow (t-1)(t-3) < 0$$

این هم که سخت نیست. ریشه‌هایش ۱ و ۳ هستند:

| t | | $1$ | | $3$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $t-1$ | − | | + | | + |
| $t-3$ | − | | − | | + |
| ضرب | + | | − | | + |
| | | | این‌جا خوبه | | |

$$\Rightarrow 1 < t < 3 \Rightarrow t \in (1,3) \Rightarrow \text{۲ ثانیه}$$

## ۷- گزینه‌ی «۴»

باید داشته باشیم:

$$-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6 > \frac{7}{2} \xrightarrow{\times(-2)} x^2 - 4x - 12 < -7 \Rightarrow x^2 - 4x - 5 < 0 \Rightarrow (x-5)(x+1) < 0$$

می‌دانیم جواب بین دو ریشه است. پس $-1 < x < 5$ و $\max(b-a) = 6$.

## ۸- گزینه‌ی «۲»

خب باید $g(t) > h(t)$ باشد؛ یعنی $-3t^2 + 18t > -t^2 + 10t$. پس داریم:

$$0 > 2t^2 - 8t$$

ریشه‌های $2t^2 - 8t$ را داریم:

$$2t(t-4) = 0 \Rightarrow t = 0 \quad , \quad t = 4$$

جدولش می‌شود:

| t | | $0$ | | $4$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| | + | | − | | + |
| | | | این‌جا خوبه | | |

پس در فاصله‌ی ۰ تا ۴ ثانیه این‌طور است؛ یعنی طی ۴ ثانیه‌ی اول.

توجه البته $t$ منفی نمی‌شود! زمان منفی هم نداریم!

## ۹- گزینه‌ی «۲»

پایین‌تر از خط $y = 2$ است یعنی $y < 2$:

$$\frac{3x^2 - 2x}{x^2 + 4} < 2$$

حالا چون $x^2 + 4 > 0$ است:

$$3x^2 - 2x < 2x^2 + 8 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 < 0 \Rightarrow (x-4)(x+2) < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x \in (-2,4)$$

پس حداکثر مقدار $b-a$ برابر ۶ است.

## ۱۰- گزینه‌ی «۴»

باید داشته باشیم $C(t) \ge 0/04$؛ یعنی:

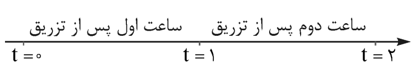
$$\frac{0/12t}{t^2+2} \ge 0/04 \xrightarrow{\div 0/04} \frac{3t}{t^2+2} \ge 1 \Rightarrow \frac{3t}{t^2+2} - 1 \ge 0 \Rightarrow \frac{3t - t^2 - 2}{t^2+2} \ge 0 \Rightarrow \frac{-t^2 + 3t - 2}{t^2+2} \ge 0$$

ریشه‌های صورت $t = 1$ و $t = 2$ هستند (چه‌جوری؟) و مخرج ریشه ندارد.

در $+\infty$، صورت منفی است (چون $-t^2$ داریم) و مخرج مثبت، پس عبارت منفی است:

| t | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| P | | − | | + | | − | |
| | | | | این‌جا خوبه | | | |

و جواب می‌شود از $t = 1$ تا $t = 2$، یعنی در ساعت دوم پس از تزریق.



**توجه** در کتاب درسی ریاضی ۲، صفحه‌ی ۲۸، برای $t$ جدول تعیین علامت را تا $-\infty$ برده است.
اما چون در این مسئله، $t$ مفهوم زمان دارد و زمان هم منفی نمی‌شود، درستش این است که فقط در فاصله‌ی $(0,+\infty)$ جدول بکشیم.

**توجه** در واقع، عبارت $t^2+2$ در مخرج، اثری روی علامت‌ها نداشت!

### ۱۱- گزینه‌ی «۳»

این یعنی $f(x)$ همواره مثبت است. پس $\Delta<0$ و ضریب $x^2$ باید مثبت باشد:

$$\Delta=(2\sqrt{2})^2-4a(a-1)=8-4a^2+4a<0 \Longrightarrow 4(a^2-a-2)=4(a+1)(a-2)>0$$

حالا چون $a>1$ است، داریم $a>2$.

### ۱۲- گزینه‌ی «۴»

تابع همواره بالای محور $x$ هاست. پس $\Delta<0$ و $a>0$.

$$a=m+2>0 \Longrightarrow m>-2$$

$$\Delta=(-2m)^2-4(m+2)(1)<0 \Longrightarrow 4(m^2-m-2)<0 \Longrightarrow 4(m-2)(m+1)<0$$

پس $-1<m<2$.

### ۱۳- گزینه‌ی «۱»

همواره در زیر محور $x$ هاست، پس $\Delta<0$ و $a<0$.

$$m-1<0 \Longrightarrow m<1$$

**one**

$$\Delta=3-4m(m-1)=-4m^2+4m+3<0 \Longrightarrow 4m^2-4m-3>0 \Longrightarrow (2m+1)(2m-3)>0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} m<-\frac{1}{2} \text{ یا } m>\frac{3}{2}$$

پس $m<-\frac{1}{2}$ در هر دو شرط قبول است.

**two** فهمیدیم $m<1$ است. پس ۳ یا ۴ نبود. برای $m=0$ هم $y=-x^2+3x$ همواره زیر محور افقی نیست. پس ۲ هم نبود.

### ۱۴- گزینه‌ی «۳»

بالای محور $x$ ها و مماس بر آن یعنی $\Delta$ صفر و $a>0$ است:

$$\Delta=(-3)^2-4(m-2)(m+2)=9-4(m^2-4)=25-4m^2=0 \Longrightarrow m=\pm\frac{5}{2}$$

$$a>0 \Longrightarrow m-2>0$$

از این دو شرط داریم: $m=\frac{5}{2}$

### ۱۵- گزینه‌ی «۱»

بیشترین مقدار سهمی برابر صفر شده است. یعنی سهمی بر محور $x$ ها مماس و در پایین آن است. پس $\Delta=0$ و $a<0$ است.
اما طراح کم‌دقت (!) توجه نکرده که $a=k+3$ و $a<0$ نتیجه می‌دهد $k<-3$ که فقط با ۱ هم‌خوانی دارد.

### ۱۶- گزینه‌ی «۱»

**one** در این سهمی $f(0)=1$ است. پس منحنی محور عرض‌ها را در نقطه‌ی $(0,1)$ قطع می‌کند و حتماً از ناحیه‌های اول و دوم می‌گذرد.
حالا دو حالت داریم: اگر $m+2<0$ باشد، سهمی رو به پایین می‌شود و از ناحیه‌های سوم و چهارم هم می‌گذرد. پس همه‌ی مقادیر $m<-2$ قبول‌اند. اما در صورتی که $m+2>0$ باشد، سهمی رو به بالاست و نمی‌تواند از هر ۴ ناحیه بگذرد. پس فقط $m<-2$ جواب است.

**two** در هر تابع درجه دوم اگر $\frac{c}{a}<0$ باشد، منحنی محور $x$ ها را در دو نقطه با طول‌های مختلف‌العلامت قطع می‌کند و از ۴ ناحیه می‌گذرد.

پس:

$$\frac{1}{m+2}<0 \Longrightarrow m+2<0 \Longrightarrow m<-2$$

### ۱۷- گزینه‌ی «۲»

خیلی ساده است. ضابطه فریاد می‌زند که از $x-4$ می‌شود فاکتور گرفت:

$$y=x^3-4x^2-x+4$$

$$\Longrightarrow y=x^2(x-4)-(x-4)=(x^2-1)(x-4)=(x-1)(x+1)(x-4)$$

حالا در حالت $x>-1$، $(x+1)$ که مثبت است؛ برای این‌که منحنی زیر محور افقی برود، باید $(x-1)(x-4)$ منفی شود. یعنی $1<x<4$ و بنابراین بیشترین مقدار $b-a$ می‌شود $4-1=3$.

**توجه** دقت می‌کنید که چرا می‌گوید «بیشترین مقدار»؟ چون وقتی مجموعه جواب نامعادله‌ای مثلاً $(1,4)$ است، می‌توانیم بازه‌های کوچک‌تر، مثلاً $(1,2)$ یا $(2,3)$ را هم به عنوان $(a,b)$ در نظر بگیریم.

**۱۸- گزینه‌ی «۴»**

بگذارید ضرب کنیم:

$$(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})=\underbrace{1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}}_{\text{ضرب در پرانتز دوم } a}+\underbrace{\frac{b}{a}+1+\frac{b}{c}}_{\text{ضرب در پرانتز دوم } b}+\underbrace{\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+1}_{\text{ضرب در پرانتز دوم } c}=3+\underbrace{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}_{\geq 2}+\underbrace{\frac{a}{c}+\frac{c}{a}}_{\geq 2}+\underbrace{\frac{b}{c}+\frac{c}{b}}_{\geq 2}$$

پس حداقل مقدار می‌شود ۲+۲+۲+۳ یعنی ۹.

**توجه** عشق فرمول‌ها حفظ کنند که:

$$x>0 \Longrightarrow (x_1+x_2+\cdots+x_n)(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n})\geq n^2$$

پس مثلاً برای دوتایی‌اش داریم:

$$a,b>0 \Longrightarrow (a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})\geq 4$$

**۱۹- گزینه‌ی «۲»**

خب باید زیر همه‌ی رادیکال‌ها را بزرگ‌تر یا مساوی صفر بگذاریم:

$$\text{①}\ \frac{1}{x^2}-\frac{3}{4}\geq 0 \Longrightarrow \frac{4-3x^2}{4x^2}\geq 0$$

ریشه‌های صورت $\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$ هستند و ریشه‌ی مخرج هم $x=0$ (مضاعف) است. پس علامت این‌جوری می‌شود:

| $x$ | | $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ | | $0$ | | $\frac{2}{\sqrt{3}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P_1$ | $-$ | $0$ | $+$ | ت.ن | $+$ | $0$ | $-$ | |

در ∞+ منفی است

پس جواب این می‌شود: $[-\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}}]-\{0\}$

$$\text{②}\ \frac{x+1}{x-1}\geq 0$$

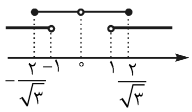
| $x$ | | $-1$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $P_2$ | $+$ | $0$ | $-$ | ت.ن | $+$ |

$$\text{③}\ \frac{x-1}{x+1}\geq 0$$

| $x$ | | $-1$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $P_3$ | $+$ | ت.ن | $-$ | $0$ | $+$ |

جواب مشترک این دوتا هم می‌شود $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

حالا از اشتراک این‌ها داریم: (دقت کنیم که $\frac{2}{\sqrt{3}}>1$).




$$x\in[-\frac{2}{\sqrt{3}},-1)\cup(1,\frac{2}{\sqrt{3}}]$$

که اجتماع دو بازه‌ی متناهی است.

**توجه** ② و ③ در واقع تابع‌هایی بودند که ضابطه‌شان عکس هم است. اگر بخواهیم $P$ و $\frac{1}{P}$ هر دو بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشند، کافی است $P>0$ باشد.

**۲۰- گزینه‌ی «۲»**

**one** زنهار که تحت هیچ شرایطی نباید دو طرف را بی‌احتیاط معکوس کنیم.

اگر دو عبارت هم‌علامت باشند، داریم:

$$x-1<x-3 \Longrightarrow -1<-3$$

این‌که بی‌معنی شد.

اگر دو عبارت هم‌علامت نباشند:

$$x-1>x-3 \Longrightarrow -1>-3$$

این همیشه هست. پس ناحیه‌ای که $x-1$ و $x-3$ هم‌علامت نیستند، جواب است:

$$(x-1)(x-3)<0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 1<x<3$$

**two** دردسر نکشید:

$$\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-3}>0 \Longrightarrow \frac{-2}{(x-1)(x-3)}>0 \Longrightarrow (x-1)(x-3)<0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 1<x<3$$